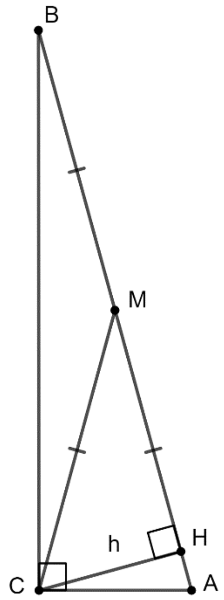
РЗА-2023. Решения

1. *В прямоугольном треугольнике квадрат высоты, не являющейся катетом, в два раза меньше площади этого треугольника. Чему может быть равно отношение острых углов треугольника*?

Решение. Возьмем прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и гипотенузой AB. Рассмотрим высоту $h = CH$, не являющуюся катетом. Допустим, что $AC < BC$ (катеты не могут быть равны, так как иначе $AB = 2h$).



Пусть S – площадь этого треугольника. Имеем $S = 0{,}5 \cdot AB \cdot h = 2h^2$, откуда $AB = 4h$.

Пусть M – середина AB, тогда CM – медиана прямоугольного треугольника ABC, значит, она равна половине гипотенузы, то есть $CM = AM = BM = 2h$. (Заметим, что отрезки CM, AM и BM – это радиусы описанной около данного треугольника окружности, так как вписанный угол C опирается на хорду AB, являющуюся диаметром.)

Рассмотрим прямоугольный треугольник CHM. В нем катет $CH = h$, а гипотенуза $CM = 2h$, значит, угол CMH равен 30°. Треугольник AMC равнобедренный с основанием AC, поэтому углы CAM и ACM равны $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Итак, в прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 75°, значит, угол B равен 15°. Отношение угла A к углу B равно 75 : 15 = 5 : 1.

Ответ: 5 : 1.

2. *Пусть n – натуральное число. Укажите все возможные остатки, которые могут получиться при делении числа* $6n + 1$ *на число* $3n – 2$.

Решение. Верно равенство $6n + 1 = (3n – 2)\cdot 2 + 5$. Поэтому, если $3n – 2$ больше 5, то 5 – это требуемый остаток. Найдем те натуральные n, при которых $3n – 2 \le 5$. Очевидно, что возможно только два варианта: $n = 1$, $n = 2$.

Обозначим $a = 6n + 1$, $b = 3n – 2$.

Если $n = 1$, то $a = 7$, $b = 1$. Тогда $7 = 7\cdot 1 + 0$, значит, остаток равен 0.

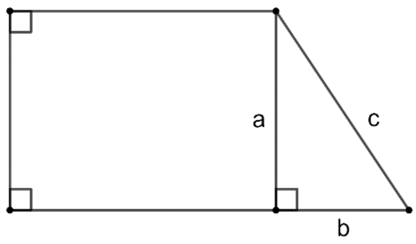
Если $n = 2$, то $a = 13$, $b = 4$. Тогда $13 = 4\cdot 3 + 1$, значит, остаток равен 1.

Имеем три возможных остатка.

Ответ: 0; 1; 5.

3. *Комната имеет форму прямоугольной трапеции, при этом длины сторон равны целому числу метров. Периметр комнаты равен* 16. *Чему равна площадь комнаты*? *Если вариантов несколько, найдите все из них*.

Решение. Из вершины тупого угла трапеции проведем высоту. Она отсекает от трапеции прямоугольный треугольник, стороны которого равны целому числу метров. Обозначив эти стороны буквами a, b, c, получаем равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Требуется найти решение этого уравнения в натуральных числах, при этом $a < c$, $b <$ c, и каждая сторона a и b не превосходит 6 (иначе $c \geq 8$ и периметр трапеции будет как минимум 18).



Преобразуем уравнение: $b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$.

Таким образом, b^2 является произведением двух различных натуральных чисел, при этом полусумма множителей равна c.

Пусть b – нечетное. Тогда числа a и c разной четности. Имеем:

$b = 1 \;\Rightarrow\; b^2 = 1$, не подходит;

$b = 3 \;\Rightarrow\; b^2 = 9 = 1{\cdot}9 \;\Rightarrow\; c = 5 \;\Rightarrow\; a = 4$;

$b = 5 \;\Rightarrow\; b^2 = 25 = 1{\cdot}25 \;\Rightarrow\; c = 13 \;\Rightarrow\; a = 12$, не подходит.

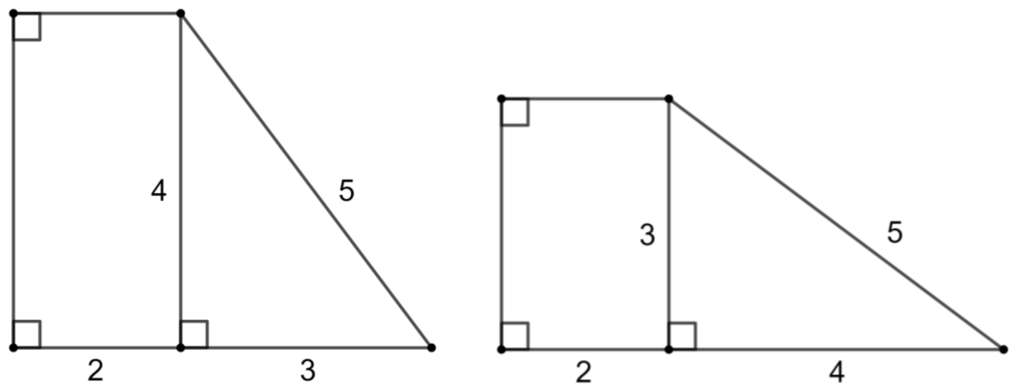
Пусть b – четное. Тогда хотя бы один множитель $c - a$ или $c + a$ четный, значит, числа a и c одной четности, следовательно, оба множителя четные. Имеем:

$b = 2 \;\Rightarrow\; b^2 = 4 = 1{\cdot}4$ – не подходит;

$b = 4 \;\Rightarrow\; b^2 = 16 = 1{\cdot}16 = 2{\cdot}8$, подходит только разложение $b^2 = 2{\cdot}8$, откуда $c = 5$, $a = 3$;

$b = 6 \;\Rightarrow\; b^2 = 36 = 1{\cdot}36 = 2{\cdot}18 = 3{\cdot}12 = 4{\cdot}9$, ни один вариант не подходит.

Итак, возможен только один прямоугольный треугольник, удовлетворяющий нашим условиям: катеты 3 и 4, гипотенуза 5. Однако получаются две трапеции: у одной катет, равный 3, расположен на основании, у другой – это высота трапеции (см. рисунок).



В первом случае площадь трапеции равна $2{\cdot}4 + 0{,}5{\cdot}3{\cdot}4 = 8 + 6 = 14$, во втором случае: $2{\cdot}3 + 0{,}5{\cdot}3{\cdot}4 = 6 + 6 = 12$.

Ответ: 12 и 14.

Замечание. Решение получится более коротким, если воспользоваться результатом о пифагоровых тройках (a, b, c). Таких троек с условием $a \leq b \leq 6$ только одна: (3, 4, 5).

4. *Укажите количество целых решений неравенства*

$$(6x-15)^7 \geq (x-1)^{14}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt[7]{t}$. Она возрастает на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, поэтому $\sqrt[7]{a} \geq \sqrt[7]{b} \ \Leftrightarrow\ a \geq b$. Преобразуем неравенство:

$$(6x-15)^7 \geq (x-1)^{14} \ \Leftrightarrow\ \sqrt[7]{(6x-15)^7} \geq \sqrt[7]{((x-1)^2)^7} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 6x-15 \geq (x-1)^2 \ \Leftrightarrow\ x^2-8x+16 \leq 0 \ \Leftrightarrow\ (x-4)^2 \leq 0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет единственное решение $x=4$, являющееся целым.

Ответ: одно целое решение.

5. *Корнями уравнения $x^2=kx+1$ являются числа a и b, а корнями уравнения $x^2=px+q$ – числа a + 1 и b + 1. Найдите значение суммы $p+q$.*

Решение. Воспользуемся формулами Виета для квадратного уравнения.

Так как числа a + 1 и b + 1 – это корни уравнения $x^2-px-q=0$, то

$$\begin{cases} p=(a+1)+(b+1) \\ -q=(a+1)(b+1) \end{cases}.$$

Вычтем из первого равенства второе и преобразуем сумму $p+q$:

$$p+q=a+b+2-(a+1)(b+1)=a+b+2-(ab+a+b+1)=1-ab.$$

Так как числа a и b – это корни квадратного уравнения $x^2-kx-1=0$, то $ab=-1$. Значит, $p+q=1+1=2$.

Ответ: 2.

6. *Сколько решений может иметь уравнение $\big|x-|x-a|\big|=a$ при различных значениях параметра a? Найдите все варианты.*

Решение. Если $a<0$, то уравнение не будет иметь решений.

Пусть $a \geq 0$. Рассмотрим все x, удовлетворяющие неравенству $x \geq a$. Преобразуем уравнение на этом промежутке, раскрыв внутренний модуль:

$$|x-(x-a)|=a \ \Leftrightarrow\ |x-x+a|=a \ \Leftrightarrow\ |a|=a.$$

Так как $a \geq 0$, то имеем верное числовое равенство. Значит, все числа из промежутка $(a;\ +\infty)$ являются корнями этого уравнения.

Итак, либо уравнение не имеет решений, либо их бесконечно много.

Ответ: 0 или бесконечно много.

7. *Учитель написал на доске выражение* $2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10$, *Вася как-то расставил в нем скобки, а затем вычислил значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло получиться у Васи*?

Решение. Независимо от того, стоят перед числами 2 и 3 скобки или нет, после преобразований выражение будет начинаться так: $2 - 3 * \dots$, где $*$ обозначает знак «плюс» или «минус». При этом возможны оба варианта. Например, в случае выражения $2 - (3 + 4) - 5 + \dots$, после раскрытия скобок перед числом 4 будет стоять знак «минус», а в случае выражения $2 - 3 + (4 - 5) + \dots$, – перед 4 будут стоять знак «плюс». Далее рассмотрим два случая.

1) Перед числом 3 поставлена скобка (одна или несколько). Тогда независимо от того, стоит перед числом 4 скобка или нет, после преобразований выражение будет начинаться так: $A = 2 - 3 - 4 * \dots$

Оценим, какое наибольшее значение может принимать такое выражение. При любой расстановке скобок после их раскрытия числа не поменяются, поэтому A не может быть больше значения, в котором после числа 4 стоят только знаки «плюс»:

$$A \le 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40, \text{ то есть } A \le 40.$$

2) Перед числом 3 нет ни одной скобки. Тогда независимо от того, поставлены перед числами 4 и 5 скобки или нет, после преобразований выражение будет начинаться так: $A = 2 - 3 + 4 - 5 * \dots$ Тогда:

$$A \le 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 38, \text{ то есть } A \le 38.$$

Итак, в любом случае $A \le 40$. Вариант $A = 40$ возможен:

$$2 - ((3 + 4) - (5 + 6) - (7 + 8) - (9 + 10)) = 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40.$$

Ответ: 40.

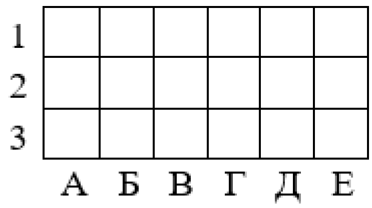
8. *На математической олимпиаде* 12% *участников не решили ни одной задачи*, 145 *человек что-то решили, но не более половины предложенных задач, а число остальных ребят, решивших более половины задач, составляет* 250% *от числа не решивших ничего. Сколько ребят участвовало в этой олимпиаде?*

Решение. По условию число участников олимпиады, решивших более половины задач, составляет 250% от числа не решивших ничего, то есть $2{,}5 \cdot 12\% = 30\%$ от количества всех участников олимпиады. Но тогда 145 ребят, решивших не более половины задач, составляют $100 - (12 + 30) = 58\%$ от общего числа участников, откуда находим количество всех участников олимпиады: $145 : 0{,}58 = 250$ человек.

Ответ: 250.

9. *Сколькими способами можно замостить прямоугольник* 3×6 *неперекрывающимися прямоугольниками* 1×3 *или* 3×1?

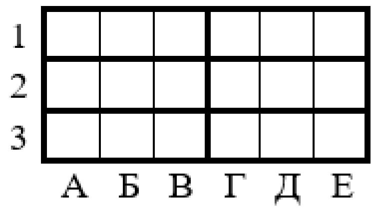
Решение. Пронумеруем строки исходного прямоугольника 3×6 как 1, 2, 3, а столбцы как А, Б, …, Е:

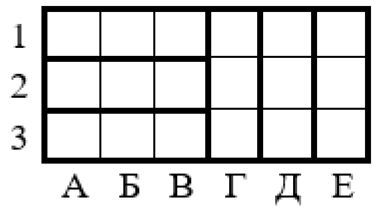


Прямоугольники размером 1×3 и 3×1 назовем *горизонтальным* и *вертикальным блоком*, соответственно.

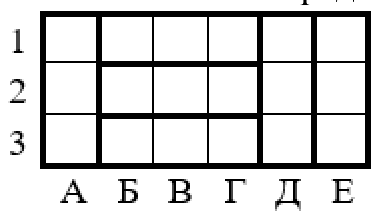
Рассмотри все возможные случаи.

Если клетка А1 накрыта горизонтальным блоком, то А2 и А3 тоже должны быть накрыты горизонтальными блоками. Для оставшейся части прямоугольника возможны 2 варианта:

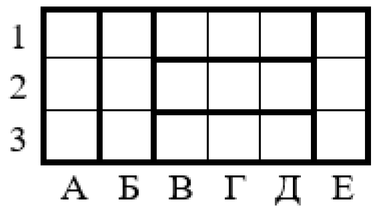




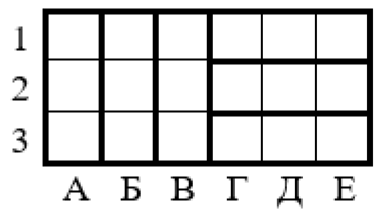
Пусть клетка А1 накрыта вертикальным блоком. Если теперь Б1 накрыта горизонтальным блоком, то остальные блоки определяются однозначно:

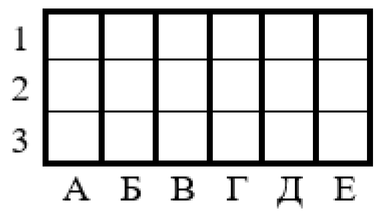


Пусть А1 и Б1 накрыты вертикальными блоками. Если при этом В1 накрыта горизонтальным блоком, то получаем следующее замощение:



Наконец, если столбцы А, Б, В накрыты вертикальными блоками, то для оставшейся части возможны два варианта:





Таким образом, всего существует 6 способов замощения прямоугольника 3×6 неперекрывающимися прямоугольниками 1×3 и 3×1 .

Ответ: 6.

10. *На уроке математики учитель написал на доске числа* 0, 1, 2, …, 30. *К доске по очереди по одному разу подходят* 30 *учеников. Каждый из них выбирает какие-то два числа x и y, стирает их, и записывает число, вычисляемое по формуле* $\frac{x+y+|x-y|}{2}$. *Какое число может остаться на доске?*

Решение. Пусть x и y – числа, выбранные некоторым учеником.

Если $x \geq y$, то $|x-y| = x-y$ и $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x$.

Если же $x < y$, то $|x-y| = -(x-y) = y-x$ и $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y$.

Таким образом, после стирания любой пары чисел на доске окажется наибольшее из них. Но тогда в итоге на доске останется наибольшее число, присутствовавшее на ней изначально, то есть 30.

Ответ: 30.