Вопрос 1

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

О числах a и b известно, что $a > b$. Какие из перечисленных неравенств обязательно выполняются:

Выберите один или несколько ответов:

- a. $-a > -b$
- b. $a^3 > b^3$
- c. $a^2 > b^2$
- d. $a > -b$
- e. $a \geqslant b$

Ясно, что неравенство $a>b$ влечет неравенства $a \geq b$ и $a^3>b^3$. Остальные неравенства выполняться не обязаны. Например, $5>3$, но $-5<-3$; а также $1>-2$, но при этом $1^2<(-2)^2$ и $1<-(-2)$.

Ответ: $a \geq b$, $a^3>b^3$

Вопрос **2**

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

О треугольнике *ABC* сделаны четыре высказывания:

1. в треугольнике *ABC* нет угла 120°
2. в треугольнике *ABC* есть угол 30°
3. треугольник *ABC* равнобедренный
4. треугольник *ABC* равносторонний

Известно, что одно из этих высказываний ложно, а остальные – истинны. Какие из перечисленных углов может иметь такой треугольник?

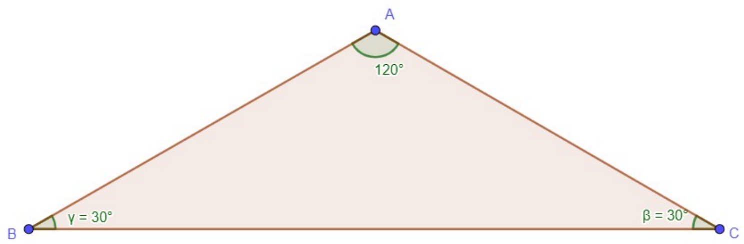
Выберите один или несколько ответов:

- a. 120°
- b. 60°
- c. 45°
- d. 30°
- e. 75°

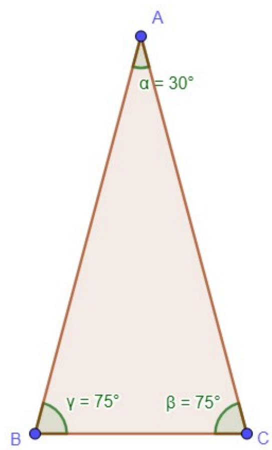
Заметим, что высказывания 2 и 4 противоречат друг другу, поэтому одновременно истинными они быть не могут. Стало быть, высказывания 1 и 3 должны быть истинны, то есть треугольник *ABC* равнобедренный, и в нем нет угла 120°.

Если высказывание 4 истинно, то мы имеем равносторонний треугольник, все углы в котором равны по 60°, что не противоречит высказываниям 1 и 3.

Если же истинно высказывание 2, то в равнобедренном треугольнике *ABC* есть угол в 30°. Теперь если это угол при основании, то остальные углы в треугольнике равны 30° и 120°, что противоречит высказыванию 1.



А если угол в 30° – это угол при вершине, то углы при основании равны 75°.



Ответ: 60°, 30°, 75°

Вопрос 3

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

Пусть $x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 5$. Найдите значение $x^3 - y^3$.

Ответ:

Выполним преобразования, учитывая условие задачи:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy) = 2(5 + xy) = 10 + 2xy = 10 + (x^2 + y^2 - (x - y)^2) = 10 + (5 - 2^2) = 11.$$

Ответ: 11

Вопрос **4**

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

Все постоянные клиенты одного магазина получают скидку на приобретенный товар в размере 15%. Если товар приобретает постоянный клиент, то магазин получает прибыль в размере 19% от закупочной цены товара. Сколько процентов прибыли получает магазин в том случае, когда товар приобретает обычный покупатель без скидки?

Ответ:

Пусть x – закупочная цена товара, а y – стоимость товара в магазине для обычного покупателя. Постоянный клиент приобретает в магазине товар за 85% от его стоимости, при этом магазин получает прибыль в 19% от его закупочной цены. Стало быть,

$$0{,}85x=1{,}19y,$$

откуда

$$x=1{,}4y.$$

Таким образом, если товар приобретает обычный покупатель, то прибыль магазина составляет 40% от его закупочной цены.

Ответ: 40%

Вопрос 5

Пока нет ответа

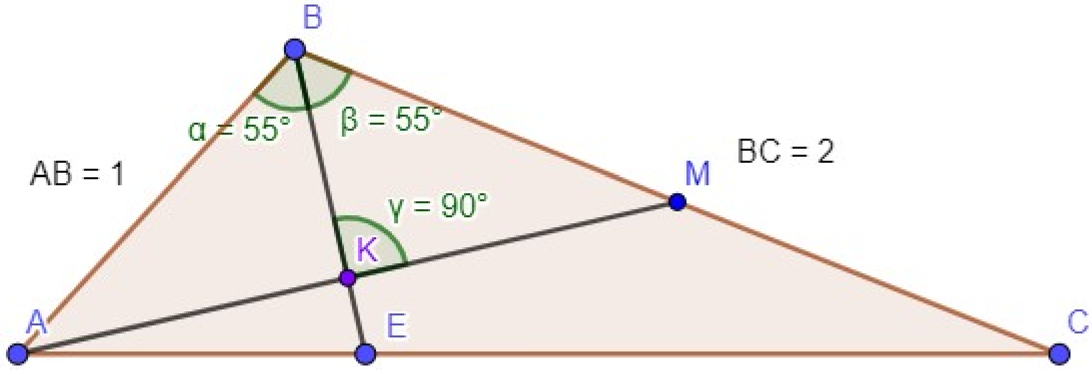
Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

В треугольнике ABC проведены биссектриса BL и медиана AM, причём $AL : LC = 1 : 2$. Вычислите угол между AM и BL. Ответ дайте в градусах.

Ответ:



Обозначим через K точку пересечения AM и BL.

По свойству биссектрисы угла треугольника имеем $BA{:}BC=AL{:}LC=1{:}2$. Значит, $\mathrm{BA}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\mathrm{BM}$, и треугольник BAM равнобедренный. При этом, BK является его биссектрисой, а стало быть и высотой. Следовательно, угол между AM и BL равен 90°.

Ответ: 90°

Вопрос 6

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

Два ковбоя Энтони Лавсон и Берт Мосс выясняют, кто самый везучий. Они вложили один патрон в барабан револьвера (в барабане 6 камор для патронов). Каждый ковбой, в свою очередь, крутит барабан и стреляет в воздух, затем передает револьвер другому. Начинает Энтони. Побеждает тот ковбой, кому удалось выстрелить. Найдите вероятность того, что победит Энтони.

Выберите один ответ:

- a. $\frac{6}{11}$
- b. $\frac{5}{11}$
- c. $\frac{1}{2}$
- d. $\frac{5}{6}$
- e. $\frac{1}{6}$

Вопрос 7

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

Сколько целых чисел могут являться корнями квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если известно, что число b положительное простое, а c – положительное нечетное?

Выберите один ответ:

- a. ни одного
- b. два
- c. одно
- d. бесконечно много
- e. три

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$ (не обязательно различные). По формулам Виета имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1 x_2=c \end{cases}.$$

Так как $x_1+x_2=-b$ – целое число, то x_1 и x_2 будут целыми одновременно. Теперь из того, что $x_1 x_2=c$ – нечетное число, следует, что x_1 и x_2 – нечетные, поэтому $b=-(x_1+x_2)$ – четное. Стало быть, b=2, в силу своей простоты.

Далее, уравнение $x^2+2x+c=0$ имеет корни только если его дискриминант

D=4–4c≥0, откуда c≤1. И с учетом того, что по условию c – положительное нечетное число, получаем, что c=1.

Остается заметить, что квадратное уравнение $x^2+2x+1=0$ имеет единственный целый корень $x_1=x_2=-1$.

Ответ: одно.

Решение

По формулам Виета запишем систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1 \cdot x_2=c \end{cases},$$ где x_1, x_2 – корни данного уравнения.

Из первого равенства вытекает: если один из корней является целым числом, то другой корень также целый.

Итак, пусть целые числа x_1, x_2 удовлетворяют данной системе. Из второго равенства следует: так как c – нечетное, то x_1, x_2 – нечетные. Тогда их сумма, равная $(-b)$ – четное число, то есть b – четное. Единственное четное простое число равно 2. Значит, $b = 2$. Подставим это значение в уравнение и выделим полный квадрат:

$$(x+1)^2+c-1=0 \quad \text{или} \quad (x+1)^2=1-c.$$

Тогда $1-c\geq0$, то есть $c\leq1$. Так как c – натуральное нечетное, то $c = 1$.

Имеем единственный вариант уравнения $x^2+2x+1=0$, которое имеет своим корнем только число $x = -1$.

Ответ: одно.

Вопрос **8**

Пока нет ответа

Балл: 1,00

Отметить вопрос

Редактировать вопрос

Найдите наименьший целый положительный корень уравнения $\left(1+\sin\frac{\pi x}{20}\right)^2+\sin^2\frac{\pi x}{22}=0.$

Ответ:

Сумма квадратов двух действительных чисел равна 0 тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно 0. Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{20}=-1\\ \sin\frac{\pi x}{22}=0\end{cases}.$$

Решаем каждое уравнение и рассматриваем пересечение решений:

$$\sin\frac{\pi x}{20}=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{20}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n \Leftrightarrow \pi x=30\pi+40\pi n \Leftrightarrow x=30+40n. \quad (1)$$

$$\sin\frac{\pi x}{22}=0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{22}=\pi k \Leftrightarrow \pi x=22\pi k \Leftrightarrow x=22k. \quad (2)$$

Так как нас интересуют только целые положительные решения, то числа n, k являются натуральными.

Из (1) видно, что все корни уравнения делятся на простое число 5. Учитывая равенство (2) заключаем, что число k кратно 5. При $k = 5$ получаем число $x = 110$, которое удовлетворяет равенству (1) при $n = 2$, значит, оно является наименьшим положительным решением исходного уравнения.

Ответ: 110.

Вопрос **9**
Пока нет ответа
Балл: 2,00

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3-x}(x^2-4x+a)=0$ имеет два различных положительных корня.
Приведите полное решение задачи.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3-x}(x^2-4x+a)=0$ имеет два различных положительных корня.
Приведите полное решение задачи.

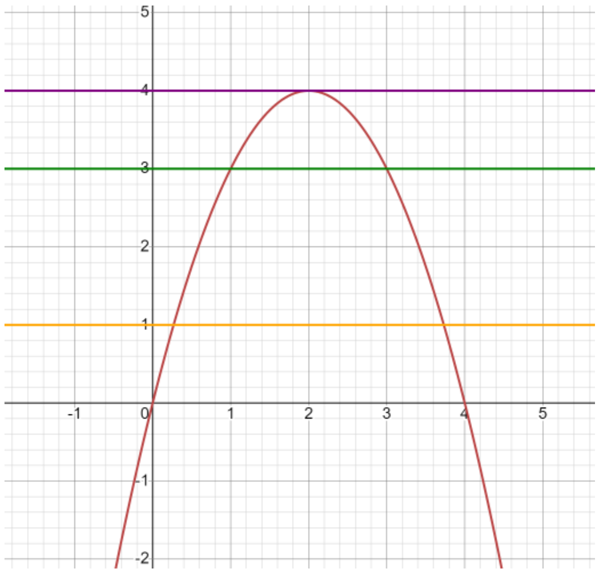
Ясно, что областью допустимых значений исходного уравнения является промежуток $(-\infty;3]$. При этом

$$\sqrt{3-x}\left(x^2-4x+a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3-x}=0\\ x^2-4x+a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x^2-4x+a=0\end{array}\right.,$$

то есть исходное уравнение имеет положительный корень $x=3$.

Таким образом, решение сводится к поиску всех значений параметра a, при которых квадратное уравнение $x^2-4x+a=0$ имеет на интервале $(0;3)$ единственный корень.

Построим в системе координат Oxa график функции $a=4x-x^2$.



Из построенного графика видно, что требуемое условие достигается при $a\in(0;3]\cup\{4\}$.

Ответ: $a\in(0;3]\cup\{4\}$.